

準解析的手法による全周波解析の試み —有限長ソレノイドコイルの共振解析—

A Trial on Full Frequency Analysis by Quasi-Analytical Approach
-An Analysis of The Finite Length Solenoid Inductors Exhibiting Resonance Phenomenon-

岩永連弥

Renya IWANAGA

指導教員 齊藤兆古

法政大学大学院理工学研究科電気電子工学専攻修士課程

Seamless analysis from the DC to microwave frequencies is difficult task but essential to modern sub-micron integrated devices from the viewpoint of electromagnetic compatibility, in particular ELF and SAR problems to the human body.

In this paper, we propose a new quasi-analytical approach taking the displacement current into account, for the full frequency analysis. Target conductive region can be subdivided into small cylindrical conductors having a simple geometrical shape. Because of the simple geometrical shape, it is possible to calculate an each of the resistances, inductances and capacitances of the subdivided conductors. This leads an equivalent circuit of the devices. Solving this equivalent circuit makes it possible to compute the electromagnetic field distributions exhibiting resonance phenomena.

This paper applies our quasi-analytical approach to a simple finite length solenoid inductor. As a result, full wave solution reflecting on the practical frequency characteristics of the solenoid inductor could be obtained.

Key Words : full wave analysis, quasi-analytical approach, finite length solenoid inductor

1. 序論

近年、電気電子機器の高性能化に伴い、高周波動作を前提とする磁気素子が増加している。これは、電磁界解析において、磁気素子の抵抗やインダクタンスを集中定数として考えることが困難であることを意味している。

一方、電磁界解析は、電磁界を支配する方程式が偏微分方程式であることから、微分を有限差分で直接置き換える有限差分法(Finite Difference Method)、変分原理に基づく有限要素法(Finite Element Method)などの数値解析法で行われる。また、電磁界が無限遠点まで広がる開領域問題に対しては、偏微分方程式の基本解を仮定した境界要素法(Boundary Element Method)などの積分方程式型解法が採用される。いずれの数値解析法も空間・時間領域を細分化し、細分化された個々の領域で解析的な関数を仮定して解くのが共通の特徴である。

近年の電気・電子装置は電源部の直流から高周波のパルス駆動部分から構成され、直流から変位電流を勘案した広範な周波数に跨るシームレスな解析がEMCやSARの観点から必須となりつつある。

残念ながら、既存の電磁界解析パッケージでは直流か

ら変位電流まで全周波数帯域に跨る解析が不可能である。

このような現状を踏まえ、本論文では有限要素法とは全く異なる方法である準解析的な電磁界解析手法を採用する。本手法は、従来の数値解析手法では導入が困難な変位電流を導体間のキャパシタンスを流れる電流として考慮する考え方である[1]。

本論文では、準解析的手法の具体的な解析例として、有限長ソレノイドコイルの共振現象解析を取り上げる。その結果、本論文で提案する準解析的モデルは未だ完全な全周波数解析とは言えないが、原理的には現代の電気・電子機器で必須となりつつある全周波数解析の第一歩として極めて有効であることを示す。

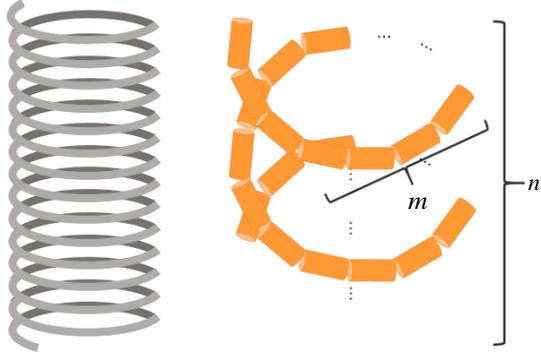
2. 準解析的電磁界解析法

ここでは、本論文で採用する有限長ソレノイドコイルの例を取り上げて準解析的手法の原理を説明する。

まず、図1(a)に示す有限長ソレノイドコイルを考える。ここで、図1(b)に示すように、有限長ソレノイドコイルの1ターンを解析的な取り扱いの容易な m 個の微小丸型導体(円柱状)に分割し、そのモデルを n 個繋げること

で、巻数 n 回の有限長ソレノイドコイルを再現する。丸型導体の総数は、 $m \times n$ 個となる。ここで、丸型導体モデルの平行な 2 本を図 2 に示す。

丸型導体の長さは、有限長ソレノイドコイルの 1 ターンを円で近似した場合の円周長の $1/m$ とする。これは、丸型導体の数 m を無限大としたとき有限長ソレノイドコイルの形状を厳密に再現可能とする条件による。また、丸型微小導体の中間で上下間がキャパシタンスで繋がれていると考え、丸型微小導体の長さが半分である場合の抵抗、インダクタンスを採用する。



(a) 供試コイル (b) 細分化モデル
図1 有限長ソレノイドコイルのモデリング

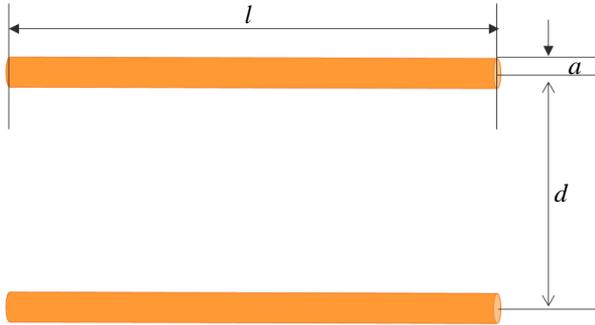


図2 平行な2本の丸型微小導体

電流が軸対象に分布すると仮定すれば、個々の円柱導体の電気抵抗 R と自己インダクタンス L は Bessel 関数を用いて解析的に計算可能である。 σ , a , l , μ_0 をそれぞれ抵抗率、導体の半径、透磁率とすれば、

$$k = a \sqrt{\frac{\omega \mu \pi}{2 \rho}} \quad (1)$$

として、自己インダクタンス L と電気抵抗 R は、それぞれ、以下のように与えられる。

(a) 電源角周波数 ω が小さく、 $k < 1$ の場合

$$R = R_D \left(1 + \frac{1}{3} k^4 \right) \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} L &= L_i + L \\ &= \left(\frac{\mu_0 l}{2} \right) \left\{ \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{64 k^3} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{\mu_0}{2\pi} \left[l \ln \left(\frac{l + \sqrt{a^2 + l^2}}{a} \right) - \sqrt{a^2 + l^2} + a \right] \end{aligned} \quad (3a)$$

(b) 電源角周波数 ω が大きく、 $k < 1$ の場合

$$R = R_D \left(\frac{1}{4} + k + \frac{1}{64} \frac{1}{k^3} \right) \quad (2b)$$

$$\begin{aligned} L &= L_i + L_o \\ &= \left(\frac{\mu_0 l}{2} \right) \left\{ \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{64 k^3} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{\mu_0}{2\pi} \left[l \ln \left(\frac{l + \sqrt{a^2 + l^2}}{a} \right) - \sqrt{a^2 + l^2} + a \right] \end{aligned} \quad (3b)$$

但し、 R_D は直流抵抗であり、

$$R_D = \frac{\rho l}{\pi a^2} \quad (4)$$

とする。

図 2 のモデルにおいて同一丸型導体が平行に配置されているため、導体間に磁束による相互結合が存在し、この相互結合は相互インダクタンス M_{ij} で表される。また、非平行である相互インダクタンスも、電流の向きと角度を考慮し解析的に計算可能である。

$$M_{ij} = \frac{\cos \theta \times \mu_0 l}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{l + \sqrt{l^2 + d_{ij}^2}}{d_{ij}} \right) - \sqrt{1 + \left(\frac{d_{ij}}{l} \right)^2} + \frac{d_{ij}}{l} \right] \quad (5)$$

また、丸型導体間に存在する変位電流はキャパシタンス C_{ij} 中を流れる電流で表される。ここでは、キャパシタンスは丸型導体の接している上下間のみで存在するものとする。

$$C_{ij} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S_{ij}}{d_{ij}} \quad (6)$$

下添え字 ij は第 i 番目と j 番目の円柱導体を示し、 d_{ij}

は第 i 番目と j 番目の円柱導体間の距離であり, ε_r は比誘電率であり, ε_0 は真空中の誘電率である.

従って, 図 1(a) の有限長ソレノイドコイルは等価回路で示すことが出来る. 図 3 は巻き数 $n=2$, 1 ターン当たりの分割数 $m=3$ である場合の等価回路例である.

すなわち, 有限長ソレノイドコイルのインピーダンスの周波数特性解析問題は, 図 2 に示す等価回路を複数個組み合わせた電気回路解析問題へ帰する [2-4].

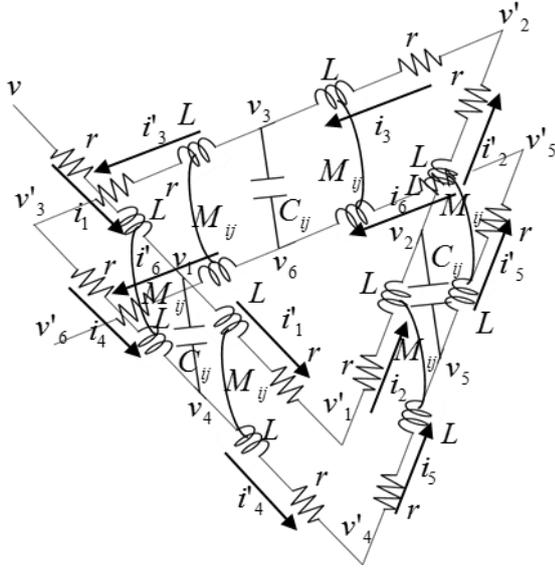


図 3 等価回路

ここで, \mathbf{X} , \mathbf{Y} を式 (7b), (7c) のようにそれぞれ状態変数ベクトルと入力ベクトルとすれば, この等価回路の定常状態におけるシステム方程式は次式で与えられる.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{D}\mathbf{X} \quad (7a)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{(m \times n)} & i'_1 & i'_2 & \cdots & i'_{(m \times n)} \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_{(m \times n)} & v'_1 & v'_2 & \cdots & v'_{(m \times n-1)} \end{bmatrix}^T \quad (7b)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} v_{in} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (7c)$$

行列 \mathbf{D} は式 (8a) で与えられる. ここで, $\mathbf{0}$ は零行列であり, \mathbf{I} は $(m \times n)$ 次の単位行列である.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} + \mathbf{L} + \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{I}_{(m \times n)} & -\mathbf{K}_1 \\ \mathbf{M} & \mathbf{R} + \mathbf{L} + \mathbf{M} & -\mathbf{I}_{(m \times n)} & \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{I}_{(m \times n)} & -\mathbf{I}_{(m \times n)} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_1^T & -\mathbf{K}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (8a)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & r \end{bmatrix} \quad (8b)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} j\omega L & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & j\omega L \end{bmatrix} \quad (8c)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & j\omega M_{12} & \cdots & j\omega M_{1j} \\ j\omega M_{21} & 0 & \cdot & j\omega M_{2j} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ j\omega M_{i1} & j\omega M_{i2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (8d)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -j\omega C_{1j} & 0 & \cdots & 0 & j\omega C_{1j} & \cdots & 0 \\ 0 & -j\omega C_{2j} & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & j\omega C_{ij} & 0 & \cdot & -j\omega C_{(i-1)j} & 0 \\ & & & & & 0 & -j\omega C_{ij} \end{bmatrix} \quad (8e)$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \quad (8f)$$

式 (8a) に示されるように, 行列 \mathbf{D} は正方行列であるから, \mathbf{D} の逆行列を式 (7a) のシステム方程式の両辺にかけることにより, 式 (9) を得ることが出来る.

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{Y} \quad (9)$$

従って, 式 (9) から得られた \mathbf{X} から, 電流ベクトル \mathbf{I} が得られる.

$$\mathbf{I} = [i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_{(m \times n)} \ i'_1 \ i'_2 \ \cdots \ i'_{(m \times n)}] \quad (10)$$

式 (10) で, 出力電流となる $i'_{(m \times n)}$ と入力電圧 v_{in} から, 式 (11) によって有限長ソレノイドコイルのインピーダンスは求められる.

$$Z = v_{in} / |i'_{(m \times n)}| \quad (11)$$

3. 有限長ソレノイドコイルの解析例

(1) 共振現象解析

準解析的手法による有限長ソレノイドコイルの計算例を示す。ここで、計算で用いた有限長ソレノイドコイルの諸定数を表1に示す。図4に示すのは、1ターン当たり50分割、合計1000個の分割個数の場合である。また、表1中の導体は被膜の厚みを含めて外径としている。

表1. 有限長ソレノイドコイルの諸定数

材質	銅
銅の抵抗率	$1.72 \times 10^{-8} [\Omega \cdot m]$
ソレノイドの大きさ	直径 2[cm] × 長さ 2.2[cm]
巻数	20[turn]
コイル径(外形)	0.5(0.55)[mm]
分割個数/巻数	50
印加電圧	1.0[V]

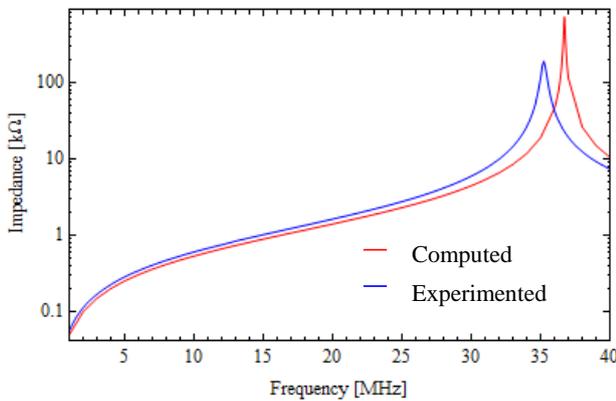
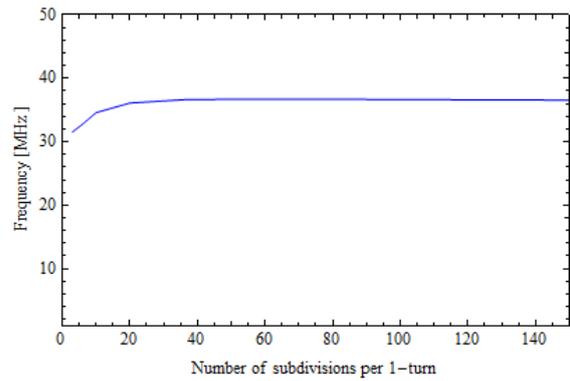


図4 インピーダンス対周波数特性

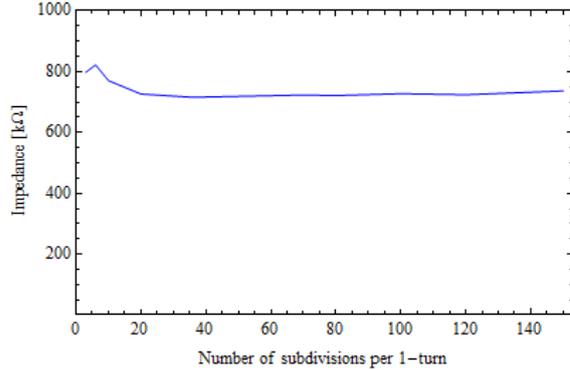
図4より、明らかに有限長ソレノイドコイルの自己共振現象が観察できる。計算値と実験値を比較すると、浮遊容量の影響が少ない低周波ではインピーダンスの傾向だけでなく値そのものもほぼ一致していることがわかる。また、高周波においては、インピーダンスの値そのものは一致しないが実験値と同じ傾向を示している。

1ターン当りの分割数を決定するために、図5に1ターンの分割個数 m と共振周波数および共振時のインピーダンス間の関係をそれぞれ示す。

図5(a)から、共振周波数は、巻線の1ターンの分割個数 m の増加に従い一定値に収束していることがわかる。図5(b)からは、共振時のインピーダンスも分割個数 m の増加に従いほぼ一定値に収束していることがわかる。これは、準解析的手法が分割した丸型微小導体の長さが無限小であるとき、すなわち、分割個数が無限大となるとき、厳密な有限長ソレノイドコイルのヘリカル形状を再現することになり、結果として厳密な解へ漸近することを意味する[5]。



(a) 分割数による共振周波数の変化



(b) 分割数によるインピーダンス(共振時)の変化

図5 分割数の共振周波数とインピーダンスに対する影響

(2) 電流分布解析

図6は銅線中を流れる導電電流とコイル間のキャパシタンスを流れる変位電流の和が構成する全電流の空間的分布を100[Hz]、36.71[MHz]、80.8[MHz]の各周波数で示している。

図6は、それぞれの周波数における導電電流及び変位電流の絶対値を電流の最大値で割り算し、0から1の値へ正規化している。したがって、カラーバーに示す色は同一であっても周波数毎に異なる大きさを示すことに注意が必要である。すなわち、それぞれの周波数における各電流の空間分布を表す。また、導電電流と変位電流はそれぞれ別に正規化していることにも注意が必要である。

図6(a)は低周波では導電電流が大部分であり空間的にほぼ均一に分布することを示す。図6(b)はコイルの始端と終端で最小値、コイルの中心で最大値をとる電流の空間基本波分布を示す。図6(c)は4個の最小値、3個の最大値をコイル軸に沿って取る電流の空間第3高調波分布を示す。

よって、図6は、電流の空間分布は単純でなく、周波数によって異なる空間分布となる分布定数系特有の空間高調波状となることを意味している。

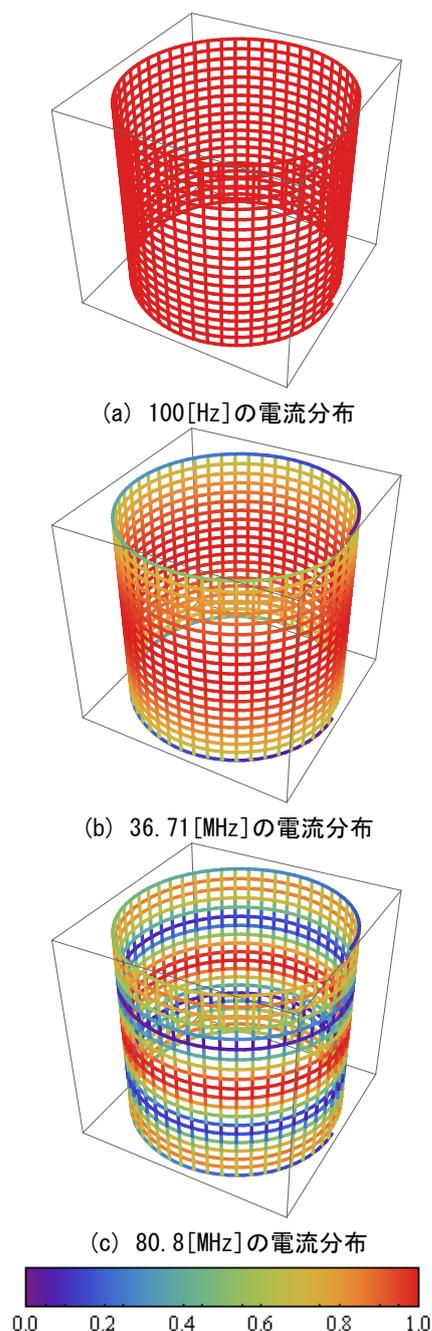


図 6 コイル全体の電流分布

4. 結論

本論文では、電磁界の数値解析法として、本研究室で提唱している変位電流を導体間キャパシタンスに流れる電流として導入した準解析的方法を有限長ソレノイドコイルのヘリカル形状を忠実に導入して、有限長ソレノイドコイルの周波数特性解析を行った。

その結果、準解析的方法は有限長ソレノイドコイルの自己共振現象を再現し、さらにコイル上またはコイル軸に沿った電流の空間高調波分布も与えることを可能ならしめた。

以上、本論文で述べた準解析的方法は、多様な周波数で駆動される電気・電子機器周辺の電磁界を概算するために極めて有効な方法と考える。

謝辞：本研究を進めるにあたって、多くの助言と御指導を頂いた齊藤兆古先生、Iliana MARINOVA 先生に心より感謝いたします。また、多くの協力と励ましを頂いた齊藤兆古研究室の皆様にも心より感謝いたします。

参考文献

- 1) 渡澤泰之, 早野誠治, 齊藤兆古: “準解析的方法による電磁界解析手法の提案 — 導体間のキャパシタンス —”, マグネティックス研究会資料, MAG-00-254, 2000.
- 2) R. Iwanaga, I. Marinova and Y. Saito: “Quasi-Analytical Approach to the Resonance Phenomenon of Finite Length Solenoid Inductors”, Asia-Pacific Symposium on Applied Electromagnetics and Mechanics 2014, Jul, 2014.
- 3) 岩永連弥, 齊藤兆古: “有限長ソレノイドコイルの全周波数解析の試み”, マグネティックス研究会資料, MAG-14-155, 2014
- 4) 岩永連弥, 齊藤兆古: “準解析的手法による有限長ソレノイドコイルの全周波数解析”, 第 23 回 MAGDA コンファレンス in 高松, Dec, 2014
- 5) R. Iwanaga, I. Marinova and Y. Saito: “All Frequency Analysis of Finite Length Solenoid Inductors by Quasi-Analytical Approach”, The 2nd International Conference on Maintenance Science and Technology, Nov, 2014